



## Credibilidade e Ruína

Lourdes B. Afonso<sup>§</sup> lbafonso@fct.unl.pt  
CMA e FCT - Universidade Nova de Lisboa

Alfredo D. Egídio dos Reis<sup>§</sup> CEMAPRE e ISEG - Universidade Técnica de Lisboa  
Howard R. Waters Dep. of Actuarial Mathematics and Statistics- Heriot-Watt University

<sup>§</sup> Agradece o apoio da Fundação para a Ciência e Tecnologia  
1º Congresso Ibérico de Actuários, Lisboa, 29 a 31 Maio 2008

Credibilidade e Ruína – 1 / 29

## Objectivo e Resumo

2 / 29

### Objectivo

- Aproximações (numéricas) da probabilidade de ruína em **tempo contínuo** e horizonte **finito** no modelo de risco clássico,
- O **prémio** é recebido **contínuamente** a uma **taxa constante** durante cada ano,
  - Constante durante o horizonte,
  - Dependente do nível de reserva num determinado ano anterior,
  - Prémio de credibilidade.
- Modelo a utilizar em **carteiras grandes**,
- Envolve **simulação** e **cálculo**,
  - Simulação das indemnizações agregadas anuais,
  - Cálculo do prémio a ser cobrado em cada ano,
  - Cálculo da reserva no final do ano,
  - Cálculo da probabilidade de ruína durante o ano.

1º Congresso Ibérico de Actuários, Lisboa, 29 a 31 Maio 2008

Credibilidade e Ruína – 3 / 29

**O Processo de Reserva**

$U(t)$  reserva da seguradora no momento  $t, 0 \leq t \leq n$

$$U(t) = u + \sum_{j=1}^{i-1} P_j + (t - i + 1)P_i - S(t)$$

$i$  é, o inteiro, tal que  $t \in [i - 1, i), i = 1, \dots, n$  e  $\sum_{j=1}^0 P_j = 0$

- $u$  é a reserva inicial
- $P_i$  é o prémio cobrado no ano  $i$ , é função das indem. passadas
- $S(t)$  são as indemnizações agregadas até ao momento  $t$

$Y_i$  são as indemnizações agregadas no ano  $i, Y_i = S(i) - S(i - 1)$ .

$\{Y_i\}_{i=1}^n$  é uma sequência de variáveis aleatórias **i.i.d.**, com uma distribuição Poisson composta cujos três primeiros momentos existem.

$\lambda$  é o parâmetro de Poisson.

**Probabilidades de ruína durante o ano**

Seja  $\psi(u(i - 1), 1, u(i))$  a probabilidade de ruína durante o ano  $i$ , dada a reserva  $u(i - 1)$  no início do ano e a reserva  $u(i)$  no final do ano.

Seja  $\Delta(u(i - 1), 1, z)$  a probabilidade de, partindo de uma reserva de  $u(i - 1)$ , a ruína não ocorra durante o ano e que a reserva no final do ano seja superior a  $z$ .

$$\Delta(u(i - 1), 1, y) = \int_y^\infty (1 - \psi(u(i - 1), 1, z) f(u(i - 1) + p_i - z, 1) dz$$

logo:

$$\psi(u(i - 1), 1, y) = 1 + \frac{1}{f(u(i - 1) + p_i - y, 1)} \frac{d}{dy} \Delta(u(i - 1), 1, y)$$

## Probabilidades de ruína durante o ano

Metodologia: Dickson and Waters (2006)

$\psi(u(i-1), 1, u(i)) =$

$$\frac{\int_{s=0}^{1-u(i)/p_i} f(u(i-1) + p_i s, s) \frac{u(i)}{(1-s)} f(p_i(1-s) - u(i), 1-s) ds}{f(u(i-1) + p_i - u(i), 1)} + \frac{f(u(i-1) + p_i - u(i), 1 - u(i)/p_i) \exp(-\lambda u(i)/p_i)}{f(u(i-1) + p_i - u(i), 1)}$$

- Fórmula exacta para calcular  $\psi(u(i-1), 1, u(i))$ ;
- São necessários valores de  $f(\cdot, s)$  para  $s$  de 0 a 1;
- Tarefa muito demorada para  $\lambda$  elevado.

↓

É necessário encontrar um método de cálculo aproximado.

1º Congresso Ibérico de Actuários, Lisboa, 29 a 31 Maio 2008

Credibilidade e Ruína – 7 / 29

## Movimento Browniano

- Klugman et al. (2004), Corolários 8.25 e 8.27
- Aproximação baseada em dois momentos;
- Se  $u = 0$  não se pode utilizar a aproximação movimento Browniano dado que em cada simulação se teria  $\psi_j(0, 1, u(1)) = 1$ ;
- Resultados demorados.

1º Congresso Ibérico de Actuários, Lisboa, 29 a 31 Maio 2008

Credibilidade e Ruína – 8 / 29

## Gama deslocada

- Metodologia: **Dickson and Waters (2006)**;
- $f(\cdot, s)$  é a função densidade de  $S(s)$  para  $0 < s \leq 1$ . Vai ser aproximada pela distribuição Gama deslocada igualando os três primeiros momentos.
- Seja  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\kappa$  tais que:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{\alpha}} &= \frac{E[(Y_i - E[Y_i])^3]}{\text{Var}[Y_i]^{3/2}} \\ \frac{\alpha}{\beta^2} &= \text{Var}[Y_i] \\ \frac{\alpha}{\beta} + \kappa &= E[Y_i] \end{aligned}$$

- $H(s) \sim G(\cdot; \alpha s, \beta)$
- Então para  $0 < s \leq 1$  a v.a.  $H(s) + \kappa s$  tem distribuição gama deslocada e os seus três momentos coincidem com os de  $S(s)$ .

## Gama deslocada

Na prática:

$$\begin{aligned} f(x, s) &\text{ é substituído por } f_G(x - \kappa s, s) \\ \exp(-\lambda t) &\text{ é substituído por } F_G(-\kappa t, t) \end{aligned}$$

$$\psi(u(i-1), 1, u(i)) \sim \psi_{TG}(u(i-1), 1, u(i))$$

$$\psi_{TG}(u(i-1), 1, u(i)) =$$

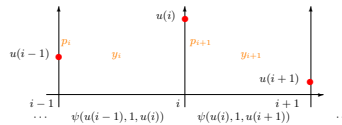
$$\begin{aligned} &\frac{\int_{s=0}^{1-u(i)/p_i} f_G(u(i-1) + (p_i - \kappa)s, s) \frac{u(i)}{(1-s)} f_G((p_i - \kappa)(1-s) - u(i), 1-s) ds}{f_G(u(i-1) + p_i - \kappa - u(i), 1)} \\ &+ \frac{f_G(u(i-1) + (p_i - \kappa)(1 - \frac{u(i)}{p_i}), 1 - \frac{u(i)}{p_i}) F_G(-\kappa u(i)/p_i, u(i)/p_i)}{f_G(u(i-1) + p_i - \kappa - u(i), 1)} \end{aligned}$$

## Gama deslocada

- Aproximação baseada em três momentos;
- Existem algoritmos de cálculo de densidades gama bastante rápidos;
- Resultados rápidos.

### PASSOS da simulação $j$

- início em  $u = U(0)$ ;
- gerar o montante de indemnizações agregadas,  $\{y_i\}_{i=1}^n$ ,  
(utilizando aproximação à distribuição Gama deslocada)
- calcular  $p_i$  ( $p_1$  conhecido), (constante, dependente da reserva, de credibilidade);
- calcular  $u(i) = u(i-1) + p_i - y_i$ ,
- calcular  $\psi_{TG}(u(i-1), 1, u(i))$ .



- Se  $u(i) < 0$  para algum  $i, i = 1, \dots, n$  então ocorreu ruína  $\rightarrow \psi_j(u, n) = 1$  e começa-se a simulação  $j + 1$
- Se  $u(i) \geq 0$  para todos  $i, i = 1, \dots, n$  calcula-se  $\psi(u(i-1), 1, u(i))$ ...

$$\bullet \psi_j(u, n) = 1 - \prod_{i=1}^n \left( 1 - \psi_{TG}(u(i-1), 1, u(i)) \right)$$

A média das  $N$  simulações  $\rightarrow$  estimativa final de  $\psi(u, n)$ .

Desvio padrão amostral  $\rightarrow$  aproxima intervalos de confiança para a estimativa de  $\psi(u, n)$ .

Teste aos resultados

A metodologia apresentada para estimar probabilidades de ruína em tempo finito e contínuo é baseada em duas aproximações:

- (i) Simulação das indemnizações agregadas anuais utilizando uma distribuição Gama deslocada.
- (ii) Estimativa da probabilidade de ruína durante o ano, conhecendo a reserva inicial e final, utilizando um movimento Browniano ou uma aproximação Gama deslocada.

É esperado que as aproximações sejam razoáveis se:

- (i)  $\lambda$ ,  $n^\circ$  esperado de sinistros em cada ano for elevado,
- (ii) a distribuição do montante das indemnizações não tenha uma cauda pesada.

Os exemplos são testados com 50 000 simulações.

$\lambda = 1$

Seal (1978)

Exp(1),

$u$	$n$	$\zeta$	$\psi(u, n)$	$\hat{\psi}_{TG}(u, n)$	$SD[\hat{\psi}_{TG}(u, n)]$	$\frac{\psi_{TG}(u, n)}{\psi(u, n)}$
10	10	0.1	0.03190	0.031051	0.000753	0.973387
22	50	0.1	0.01562	0.014479	0.000525	0.926960
44	600	0.1	0.01348	0.013282	0.000508	0.985297
66	600	0.1	0.00135	0.001618	0.000178	1.198587

Wikstad (1971)

CASE IA

Exp(1),

$u = 10$

$n$	$\zeta$	$\psi(u, n)$	$\frac{\psi_{TG}(u, n)}{\psi(u, n)}$
10	0.05	0.0367	0.950136
10	0.25	0.0209	0.962163
100	0.15	0.1920	1.001954
100	0.25	0.1016	1.003070

CASE IIA

$$P(x) = 1 - 0.0039793 \exp(-0.014631x) - 0.1078392 \exp(-0.19206x) - 0.8881815 \exp(-5.514588x)$$

$u = 100, n = 10$

$\zeta$	$\psi(u, n)$	$\frac{\psi_{TG}(u, n)}{\psi(u, n)}$
0.05	0.0094	1.195883
0.15	0.0093	0.942052
0.25	0.0092	0.987260

## Conclusões

- $\psi_{TG}(u, n)$  é próximo de  $\psi(u, n)$ .
- Os desvios padrões das estimativas são quase reduzidos.
- A metodologia é bastante rápida.

Ex:  $\psi(u, n = 600)$  Seal (1978) com 3 valores para  $u$  demorou aprox. 19 horas.

Linux Server (Debian Stable) com 4 processadores AMD Opteron of 64 bits com 2 200Mhz e 4GB RAM.

## Aplicações numéricas

17 / 29

### Aplicações práticas

- Prémio como função da reserva,
- Prémio de credibilidade calculado pelo modelo de Bühlmann,
- Prémio de credibilidade calculado pelo modelo de Bühlmann-Straub.

**Hipóteses**

$\theta_k$  é o parâmetro de risco do risco  $k$ .  $\Theta$  é uma v.a. com distribuição estrutural  $U(\theta)$ .

$Y_{ki}$  são as indemnizações agregadas do risco  $k$  no ano  $i$ , e seguem uma distribuição Poisson composta condicional ao parâmetro de risco.

Hipóteses

B1: As v.a.  $Y_{ki}$  ( $i = 1, \dots, m + n$ ) são, condicionais a  $\Theta_k = \theta_k$ , i.i.d. e têm momentos condicionais:

$$\begin{aligned} \mu(\theta_k) &= E[Y_{ki} | \Theta_k = \theta_k] \\ \sigma^2(\theta_k) &= Var[Y_{ki} | \Theta_k = \theta_k] \end{aligned}$$

B2: Os pares  $(\Theta_1, (Y_{1,1}, \dots, Y_{1,m+n})), \dots, (\Theta_r, (Y_{r,1}, \dots, Y_{r,m+n}))$  são i.i.d.

**O modelo**

$$P_{ki}^B = \hat{z} \bar{Y}_k + (1 - \hat{z}) \bar{Y} \tag{1}$$

onde:

$$\hat{z} = \frac{i - 1}{i - 1 + \frac{\widehat{\sigma^2}}{\tau^2}}$$

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \frac{1}{(i - 2)} \sum_{l=1}^{i-1} (Y_{kl} - \bar{Y}_k)^2$$

$$\widehat{\tau^2} = \max \left( \frac{1}{r - 1} \sum_{k=1}^r (\bar{Y}_k - \bar{Y})^2 - \frac{\widehat{\sigma^2}}{r}, 0 \right)$$

$$\bar{Y}_k = \frac{1}{i - 1} \sum_{l=1}^{i-1} Y_{kl} \quad \text{and,} \quad \bar{Y} = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \bar{Y}_k$$

Nota: O prémio puro total da carteira é dado pelo número de riscos multiplicado pela média observada do colectivo na carteira, i.e.,

$$\sum_{k=1}^r P_{ki}^B = r \bar{Y}.$$



## Exemplo numérico

Montante de indem.  $Z \sim \text{Lognormal}(\theta, \sigma^2 = 0.97411)$ ,

$\theta$	$p_i^*$
0.1	0.4
0.2	0.4
0.4	0.2

Número de sinistros  $N \sim \text{Poisson}(\lambda = 1000)$ ,

$$P_{ki}^E P1 = (1 + \zeta(u(0), 0.01)) E[E[Y_{ki} | \Theta_k = \theta]],$$

$$P_{ki}^C P2 = (1 + \zeta(u(0), 0.01)) P_{ki}^B$$

Reserva inicial  $u = 300$ ,

Carga segurança  $\zeta(u(0), 0.01) = 0.043224$ ,

$$\zeta(u(0), 0.01) = 43.3933(300)^{-1.21074}$$

Períodos de tempo  $m = 5, n = 10$ ,

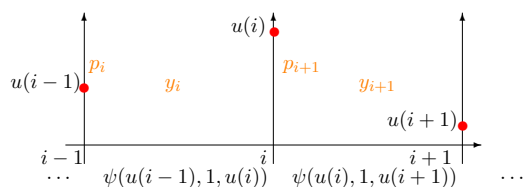
Carteira  $\theta_1 = \theta_2 = 0.1, \theta_3 = \theta_4 = 0.2, \theta_5 = 0.4$ ,

N. Simulações 50 000  $\psi(u, n)$ , 10 000 Figuras, 50 000 Estatísticas

1º Congresso Ibérico de Actuários, Lisboa, 29 a 31 Maio 2008

Credibilidade e Ruína – 22 / 29

## Uma corrida



P tipo	Ano $i$	1	...	5	6	7	8	...	15
	$y_i$	10,029.1	...	10,192.8	10,176.2	11,043.5	9,657.3	...	9,794.4
	$p_i$	-	...	-	10,433.3	10,433.3	10,433.3	...	10,433.3
P1	reserva no final do ano	-	...	300.0	557.1	- 53.1			
	$\psi(u(i-1), 1, u(i))$	-	...	-	0.00307	1			
	$\hat{\psi}(300, 10)$								1
	$p_i$	-	...	-	10,515.6	10,532.3	10,673.5	...	10,543.5
P2	reserva no final do ano	-	...	300.0	639.4	128.2	1,144.4	...	5,114.86
	$\psi(u(i-1), 1, u(i))$	-	...	-	0.0014	0.0763	0.0053	...	0.0E+00
	$\hat{\psi}(300, 10)$								0.0824814

1º Congresso Ibérico de Actuários, Lisboa, 29 a 31 Maio 2008

Credibilidade e Ruína – 23 / 29

## Resultados

Risco	$u(0)$	P1		P2	
		$\psi(u, 10)$	$SD[\psi(u, 10)]$	$\psi(u, 10)$	$SD[\psi(u, 10)]$
1	60	0.034	6.66E-08	0.334	2.61E-06
2	60	0.034	6.52E-08	0.337	2.63E-06
3	60	0.326	2.25E-06	0.394	2.76E-06
4	60	0.325	2.22E-06	0.393	2.75E-06
5	60	1.000	1.60E-08	0.501	2.77E-06
<b>Cart.</b>	<b>300</b>	<b>0.010</b>	<b>7.18E-08</b>	<b>0.015</b>	<b>1.40E-07</b>

$u$	P	NRuínas	Prop	Avg $i$	Avg $u(i)$	Avg $u(i - 1)$	Avg $p_i^{\diamond}$	Avg $y_i$
250	1	34	0.926	6.00	- 70.88	250.00	10 540.10	10 860.98
250	2	80	0.876	6.08	- 72.30	245.34	10 404.08	10 721.72
300	1	62	0.879	6.11	- 87.02	288.50	10 433.30	10 808.84
300	2	150	0.806	6.25	- 88.61	280.11	10 314.70	10 683.41
350	1	109	0.806	6.36	- 79.88	315.04	10 359.70	10 754.64
350	2	230	0.745	6.46	- 93.24	297.03	10 247.75	10 638.02

+/- 30% de caminhos comuns de ruínas

$\diamond$  apenas faz sentido em P2

1º Congresso Ibérico de Actuários, Lisboa, 29 a 31 Maio 2008

Credibilidade e Ruína – 24 / 29

## Conclusões (Bühlmann)

- P2 aumenta a probabilidade de ruína,
- a curva no gráfico está relacionada com a carga de segurança ser função da reserva inicial e da prob. de ruína em horizonte infinito,
- $SD[\psi(u, 10)]$  são muito pequenos,
- P2 produz probabilidades de ruína semelhantes para cada risco,
- abandonou-se o estudo risco a risco, foi dado enfoque à carteira,
- ruína no final do período ocorre maioritariamente nos primeiros anos,
- a proporção de prob. de ruína devido à ruína durante o ano é menor no P2,
- a reserva média no início do ano em que ocorre ruína é comparável para P1 e P2,
- P2 tem prémio médio inferior no ano em que ocorre ruína no fim do período,
- P2 tem menor prémio e indemnização agregada médios no ano em que ocorre ruína,
- a indemnização média é 10% superior ao esperado (10 000).

1º Congresso Ibérico de Actuários, Lisboa, 29 a 31 Maio 2008

Credibilidade e Ruína – 25 / 29

## Outros estudos

- (B+BS) Parâmetro de Poisson variável
- (B) Carga de segurança variável: dependendo da reserva no início do ano
- (BS) Volume de risco variável ao longo dos anos

## Conclusões

- o modelo para estimar probabilidades e ruína em tempo contínuo e horizonte finito é  **muito flexível**  no que respeita à mudança de  **prémio**  de ano para ano, distribuições dos  **montantes de indemnizações** , ao  **número de sinistros** , ao  **volume de risco**  e à  **distribuição estrutural** .
- A mais valia deste modelo é ser  **facilmente aplicável a carteiras grandes** , onde os usuais métodos numéricos são muito demorados. Os  **tempos de corrida do método não dependem de  $\lambda$** .

**Bibliografia**

AFONSO, L. B. (2008).

*Evaluation of ruin probabilities for surplus processes with credibility and surplus dependent premiums.* Tese de doutoramento, ISEG.

AFONSO, L., EGÍDIO DOS REIS, A. AND WATERS, H. (SUBMETIDO).

Numerical evaluation of continuous time ruin probabilities for a risk process with annually varying premiums. *Pré-Publicações do Departamento de Matemática N.10/2007* disponível em <http://www.dmat.fct.unl.pt/cma>

BÜHLMANN, H. AND GISLER, A. (2005) *A course in credibility theory and its applications.* Springer.

DICKSON, D. AND WATERS, H. (2006). Optimal dynamic reinsurance. *ASTIN Bulletin*, 36(2):415-432.

GERBER, H. U. (1979). *An Introduction to Mathematical Risk Theory.* Huebner Foundation for Insurance Education University of Pennsylvania, Philadelphia, Pa 19104 USA.

SEAL, H. L. (1978). *Survival probabilities, the goal of risk theory.* Wiley, New York.

WIKSTAD, N. (1971). Exemplification of ruin probabilities. *ASTIN Bulletin*, 6(2):147–152.

1º Congresso Ibérico de Actuários, Lisboa, 29 a 31 Maio 2008

Credibilidade e Ruína – 29 / 29