Estrategia de umbral con reaseguro proporcional en un modelo Sparre Andersen con ocurrencias Erlang y cuantía exponencial [1]

Anna Castañer Garriga
M^a Mercè Claramunt Bielsa
Maite Mármol Jiménez

Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial
Universidad de Barcelona
Avda. Diagonal 690. 08034 Barcelona (España)
E-mails: acastaner@ub.edu, mmclaramunt@ub.edu y mmarmol@ub.edu

Resumen

En este trabajo analizamos los efectos de la introducción de una estrategia de reaseguro umbral, definida inicialmente en Claramunt et al. (2007), en un modelo Sparre Andersen. Obtenemos la ecuación íntegro-diferencial de la función Gerber-Shiu, a partir de la cual se derivan las ecuaciones diferenciales para la probabilidad de ruina y la transformada de Laplace incompleta del momento de ruina.

Palabras clave: Modelo Sparre Andersen, teoría de la ruina, reaseguro.

Abstract

In this paper we analyze the effect of the introduction of a threshold reinsurance strategy, defined in Claramunt et al. (2007), in a Sparre Andersen model. We obtain the integro-differential equation for the Gerber-Shiu function. The differential equations for the ruin probability and the defective Laplace transform of the time of ruin are also obtained as special cases.

Keywords: Sparre Andersen model, ruin theory, reinsurance.

[1] Trabajo financiado parcialmente por el Ministerio de Educación y Ciencia y FEDER 2006. MTM2006-13468 y MTM2006-09920.

1 Introducción

En el modelo Sparre Andersen[2] de la teoría del riesgo, el nivel de las reservas $R(t)$ en un momento determinado $t \in [0, \infty)$ se define como $R(t) = u + ct - S(t)$ siendo $u = R(0)$ el nivel inicial de las reservas y c la intensidad de prima recibida. $S(t)$ representa la siniestralidad agregada, es decir el total de siniestros ocurridos hasta el momento t,

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} z_i,$$

donde $N(t)$, es el número de siniestros ocurridos hasta el momento t, y z_i es la cuantía del i-ésimo siniestro con función de densidad $f(z)$.

En este modelo, $N(t)$ es un proceso de renovación ordinario y los tiempos de interocurrencia entre dos siniestros consecutivos, $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$, son una secuencia de variables aleatorias idéntica e independientemente distribuidas. Por la condición de "net profit", $c > E[z]/E[T_i]$.

El momento de ruina, definido como el primer momento en el que las reservas toman niveles negativos, se denota como $T = \min\{t \mid R(T) < 0\}$, con $T = \infty$ si $R(T) \geq 0$ para todo $t \geq 0$. La probabilidad de ruina última es $\psi(u) = P[T < \infty \mid R(0) = u]$.

Sea $R(T-)$ las reservas justo antes de producirse la ruina y $R(T)$ la cuantía de la ruina. Gerber y Shiu (1998) definen la función

$$\phi(u) = E\left[e^{-\delta T} w\left(R(T-), |R(T)|\right) I\left(T < \infty\right) \mid R(0) = u\right], \qquad (1)$$

con $\delta \geq 0$ y $w(x, y)$ la función de penalización. De esta forma, $\phi(u)$, es el importe de la penalización actualizado desde el momento de ruina y el parámetro δ puede ser interpretado como una tasa de interés. Por otro lado, la función (1) puede ser analizada en términos de una transformada de Laplace, siendo δ el parámetro de la transformación.

Si $w(x, y) = 1$, obtenemos la expresión $\phi(u) = E\left[e^{-\delta T} I(T < \infty)\right] = \mathcal{L}(u)$, que puede interpretarse como la transformada de Laplace incompleta del momento de ruina T. Si además $\delta = 0$, entonces $\phi(u) = E[I(T < \infty)] = P[T < \infty] = \psi(u)$, siendo $\psi(u)$ la probabilidad de ruina.

En este trabajo modificamos el modelo con la introducción de una estrategia de reaseguro que podemos considerar dinámica, puesto que actúa de forma diferente en función del nivel de las reservas. Esta estrategia está basada en el reaseguro proporcional. Este tipo de reaseguro ha sido muy analizado en la literatura actuarial, en concreto Centeno (1986 y 2002) y Dickson y Waters (1996) estudian la influencia que este tipo de reaseguro tiene en la probabilidad de ruina última a través del coeficiente de ajuste.

A esta nueva estrategia la hemos denominado "estrategia de reaseguro umbral" (Claramunt et al. (2007 y 2008)), ya que encontramos dos tramos diferenciados en función de un umbral b:

[2] Sparre Andersen (1957).

- <u>Primer tramo para $0 \leq u < b$</u>: La entidad aseguradora decide aplicar un reaseguro proporcional siempre que su nivel de reservas es inferior a un nivel predeterminado al que denominamos b. En este tramo, el asegurador (al que se denomina cedente) asume únicamente un porcentaje k de la cuantía de los siniestros, al que se denomina nivel de retención, y el reasegurador se hará cargo del $(1 - k)$ restante.

  Evidentemente, de igual forma que se cede la obligación de pagos de una parte del siniestro, también se cede a la reaseguradora una parte de la prima. Denominamos c' a la prima que retiene el asegurador. En este caso la condición de "net profit" debe continuar cumpliéndose, de forma que $c' > kE[z]/E[T_i]$.

- <u>Segundo tramo para $u \geq b$</u>: Cuando las reservas superan el nivel b, el asegurador considera que ya no es necesario ceder una parte de los siniestros y de las primas, puesto que la cartera ya ha alcanzado un nivel de reservas suficientes que le asegura cierta estabilidad y seguridad.

Gráficamente, la idea de esta estrategia de reaseguro umbral se recoge en la Figura 1.

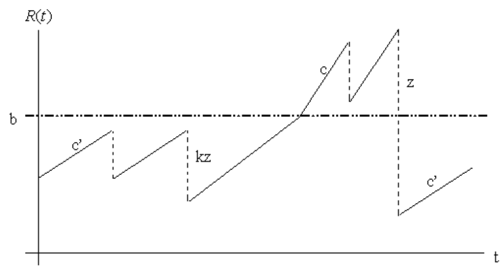

Figura 1: Trayectoria de las reservas, $R(t)$, en una cartera con estrategia de reaseguro umbral.

En el presente trabajo, estudiamos la función Gerber-Shiu en un modelo Sparre Andersen con tiempos de interocurrencia distribuidos según una Erlang $(2, \beta)$ que incluye una estrategia de reaseguro umbral.

En el apartado 2 se presenta la ecuación íntegro-diferencial para la función Gerber-Shiu. A partir de la misma, en el apartado 3, presentamos las ecuaciones diferenciales para la probabilidad de ruina y el momento de ruina en el caso particular de distribución exponencial para la cuantía individual de un siniestro.

2 Ecuación íntegro-diferencial para la función Gerber-Shiu

En este apartado, presentamos la ecuación íntegro-diferencial para la función Gerber-Shiu en un modelo modificado con una estrategia de reaseguro umbral. Para ello seguimos un proceso similar al usado en diversos trabajos sobre estrategias de dividendos de umbral, entre ellos Lin y Pavlova (2006), Wan (2007) o Lin y Sendova (2008).

Dependiendo de las reservas iniciales u, la función Gerber-Shiu queda definida como una función a tramos.

$$\phi_k(u) = \begin{cases} \phi_{k1}(u) & 0 \leq u < b \\ \phi_{k2}(u) & u \geq b \end{cases}.$$

Teorema 1 *La función $\phi_k(u)$ cumple la siguiente ecuación íntegro-diferencial*

$$\phi_k''(u) = \begin{cases} \phi_{k1}''(u) & 0 \leq u < b \\ \phi_{k2}''(u) & u \geq b \end{cases},$$

donde

$$\begin{aligned} \phi_{k1}''(u) &= 2\left(\frac{\delta+\beta}{c'}\right)\phi_{k1}'(u) - \left(\frac{\delta+\beta}{c'}\right)^2\phi_{k1}(u) \\ &\quad + \frac{\beta^2}{c'^2}\left[\int_0^{\frac{u}{k}}\phi_{k1}(u-zk)f(z)dz + \xi_{k1}(u)\right], \\ \phi_{k2}''(u) &= 2\left(\frac{\delta+\beta}{c}\right)\phi_{k2}'(u) - \left(\frac{\delta+\beta}{c}\right)^2\phi_{k2}(u) \\ &\quad + \frac{\beta^2}{c^2}\left[\int_0^{u-b}\phi_{k2}(u-z)f(z)dz + \int_{u-b}^{u}\phi_{k1}(u-z)f(z)dz + \xi_{k2}(u)\right], \end{aligned} \tag{2}$$

siendo,

$$\begin{aligned} \xi_{k1}(t) &= \int_{\frac{t}{k}}^{\infty} w(t, zk-t)f(z)dz, \\ \xi_{k2}(t) &= \int_{t}^{\infty} w(t, z-t)f(z)dz. \end{aligned}$$

3 Ecuaciones diferenciales para la probabilidad de ruina y el momento de ruina

Si la cuantía individual de un siniestro se distribuye según una exponencial unitaria, $f(z) = e^{-z}$, y $w(x, y) = 1$, derivando (2) obtenemos la ecuación diferencial para la transformada de Laplace incompleta del momento de ruina,

$$\mathcal{L}_k'''(u) = \begin{cases} \mathcal{L}_{k1}'''(u) & 0 \leq u < b \\ \mathcal{L}_{k2}'''(u) & u \geq b \end{cases},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'''_{k1}(u)=&\left[2\left(\frac{\delta+\beta}{c'}\right)-\frac{1}{k}\right]\mathcal{L}''_{k1}(u)-\left[\left(\frac{\delta+\beta}{c'}\right)^2-\frac{2}{k}\left(\frac{\delta+\beta}{c'}\right)\right]\mathcal{L}'_{k1}(u)\\&-\left[\frac{1}{k}\left(\frac{\delta+\beta}{c'}\right)^2-\frac{\beta^2}{kc'^2}\right]\mathcal{L}_{k1}(u),\\\mathcal{L}'''_{k2}(u)=&\left[2\left(\frac{\delta+\beta}{c}\right)-1\right]\mathcal{L}''_{k2}(u)-\left[\left(\frac{\delta+\beta}{c}\right)^2-2\left(\frac{\delta+\beta}{c}\right)\right]\mathcal{L}'_{k2}(u)\\&-\left[\left(\frac{\delta+\beta}{c}\right)^2-\frac{\beta^2}{c^2}\right]\mathcal{L}_{k2}(u).\end{aligned}$$

Si además $\delta = 0$, obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales para la probabilidad de ruina,

$$\begin{aligned}\psi'''_{k1}(u)=&\left[\frac{2\beta}{c'}-\frac{1}{k}\right]\psi''_{k1}(u)-\left[\left(\frac{\beta}{c'}\right)^2-\frac{2}{k}\frac{\beta}{c'}\right]\psi'_{k1}(u), \qquad 0\leq u<b\\\psi'''_{k2}(u)=&\left[\frac{2\beta}{c}-1\right]\psi''_{k2}(u)-\left[\left(\frac{\beta}{c}\right)^2-\frac{2\beta}{c}\right]\psi'_{k2}(u) \qquad u\geq b.\end{aligned}$$

Podemos observar en las ecuaciones diferenciales ordinarias obtenidas, que para $k = 1$ (siendo entonces $c' = c$) las expresiones para los dos tramos son iguales y coinciden, obviamente, con las que pueden derivarse de un modelo sin reaseguro.

Las expresiones para $\psi_k(u)$ se obtendrán a partir de las ecuaciones diferenciales ordinarias anteriores y tres condiciones adicionales. Las dos primeras condiciones se derivan de la necesidad de que la probabilidad de ruina cuando las reservas iniciales tienden a infinito sea nula y de que la función sea continua en b.

$$\begin{aligned}\lim_{u\to\infty}\psi_k(u)=&\ 0,\\\psi_{k1}(b)=&\ \psi_{k2}(b).\end{aligned}$$

La tercera condición se obtiene de sustituir la solución general de la ecuación diferencial ordinaria en la ecuación íntegro-diferencial. Para $\mathcal{L}_k(u)$ se sigue un proceso similar.

4 Bibliografía

- Centeno, L. (1986), "Measuring the effects of reinsurance by the adjustment coefficient", *Insurance: Mathematics and Economics*, 5,169-182.

- Centeno, L. (2002), “Measuring the effects of reinsurance by the adjustment coefficient in the Sparre Anderson model”, *Insurance: Mathematics and Economics*, 30, 37-49.

- Claramunt, M.M.; Mármol, M. y A. Castañer (2007), “The effect of a threshold reinsurance strategy on solvency measures”, *11th International Congress on Insurance: Mathematics and Economics*, Piraeus.

- Claramunt, M.M.; Mármol, M. y A. Castañer (2008), “El reaseguro proporcional de umbral y la probabilidad de supervivencia como criterio de elección de estrategias”, (enviado a *Estadística Española* y en proceso de evaluación).

- Dickson, D.C.M. y Waters, H.R. (1996), “Reinsurance and ruin”, *Insurance:Mathematics and Economics*, 19, 61-80 .

- Gerber, H. y Shiu, E.S.W. (1998), “On the time value of ruin”, *North American Actuarial Journal*, 2, 48-78.

- Lin, X.S. y Pavlova, K.P. (2006), “The compound Poisson risk model with a threshold dividend strategy”, *Insurance: Mathematics and Economics,* 38, 57–80.

- Lin, X.S. y Sendova, K.P. (2008), “The compound Poisson risk model with multiple thresholds”, *Insurance: Mathematics and Economics*, 42, 617-627.

- Sparre Andersen, E. (1957), “On the collective theory of risk in the case of contagion between the claims”, *Transactions XVth Int. Congress of Actuaries II*, New York, 219-229.

- Wan, N. (2007), “Dividend payments with a threshold strategy in the compound Poisson risk model perturbed by diffusion”, *Insurance: Mathematics and Economics*, 40, 509-523.